

II 다항함수의 미분법

영국의 수학자 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 운동하는 물체의 속도에 대하여 연구하는 과정에서 미분법을 발견하였고, 이와는 별개로 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)는 곡선의 접선의 기울기를 통해 도함수를 연구하면서 미분법을 발견했다고 한다.

지금은 두 사람이 서로 독립적으로 미분을 발견한 것으로 인정하고 있지만, 그 당시에는 누가 먼저 발견하였는지에 대한 논쟁이 심각하여 영국과 유럽 대륙 사이에 수학적 교류가 끊길 정도였다고 한다.

미분은 우주를 관찰하는 중요한 수단일 뿐만 아니라 물가 변동, 기상 관측 등 다양한 분야에서 활용되고 있다.



1. 미분계수와 도함수

2. 도함수의 활용

이 단원에서는

다항함수의 미분계수와 도함수의 뜻을 이해하고,
이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결한다.

1 미분계수와 도함수

01 미분계수
02 도함수

“넓은 의미에서 볼 때 미적분은 자연의 진리를 이해하는 데 가장 큰 도움을 준다.”

(출처: Osgood, W. F., 「The calculus in our colleges and technical schools」)



오스굿 (Osgood, W. F., 1864~1943)
미국의 수학자

이 글은 오스굿이 미국 수학회 회장으로서 “미국 대학과 기술학교에서 미적분의 의미”란 제목으로 강연하면서 미적분의 중요성을 강조하는 내용의 결론을 장식하는 문장이다.

01 미분계수

학습 목표

- 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
- 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

준비하기

1 두 점 $(1, 2)$와 $(2, 7)$을 지나는 직선의 기울기를 구하시오.

2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

다가서기

'부산에서 울산까지 시속 83 km로 이동했다', '가뭄이 계속되어 저수지의 수위가 낮아졌다'와 같이 시간에 따라 위치나 양 등이 변하는 경우가 있다.

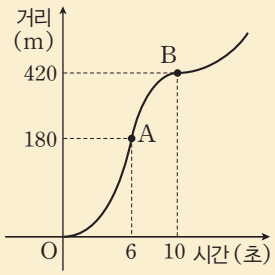
이때 시간에 따른 위치와 양의 변화율을 알면 앞으로의 변화를 예측할 수 있다.



평균변화율

생각 열기 오른쪽 그림은 어떤 자동차가 달린 시간과 거리 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다.

▶ A 지점에서 B 지점까지 자동차의 평균 속도(m/s)를 구해 보자.



함수 $y=f(x)$에서 x의 값의 변화량에 대한 y의 값의 변화량의 비를 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각

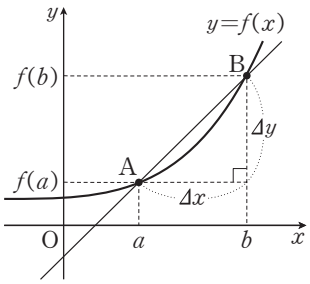
$$\Delta x,\ \Delta y$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\Delta x=b-a,$$

$$\Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.



Δ는 차이를 뜻하는 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자로 'delta'라고 읽는다.

또, x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

이때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

생각톡톡
상수함수의 평균변화율은 얼마일까?

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

예제 1 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) -2에서 3까지 (2) a에서 $a+\Delta x$까지

풀이 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{3^2-(-2)^2}{5}=\frac{5}{5}=1$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$

$=\frac{2a\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+\Delta x$

답 (1) 1 (2) $2a+\Delta x$

문제 1 함수 $f(x)=-x^2+4$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) 1에서 3까지 (2) 2에서 $2+\Delta x$까지

미분계수

이제 $x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 순간적인 변화율을 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다.

여기서 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하며, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

미분계수 $f'(a)$는 'f prime a'라고 읽는다.

또, 함수 $y=f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 '함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다'라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

위의 식에서 $a+\Delta x=x$라 하면 $f'(a)$를 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$a+\Delta x=x$에서 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 $x \longrightarrow a$이다.

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예제 2 함수 $f(x)=x^2+x$의 $x=3$에서의 미분계수를 구하시오.

풀이 1 $f'(3)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(3+\Delta x)^2+(3+\Delta x)\}-(3^2+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(7+\Delta x)=7$

풀이 2 $f'(3)=\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}$

$=\lim_{x \to 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3}=\lim_{x \to 3}(x+4)=7$

답 7

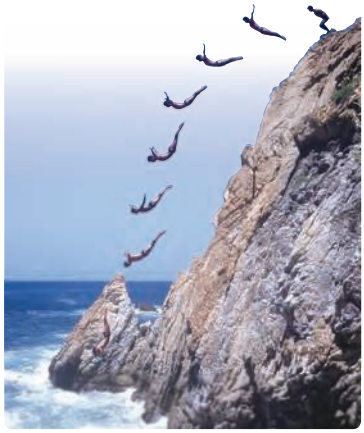
문제 2 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수를 구하시오.

(1) $y=3x-2$ (2) $y=2x^2-x$

문제 3 지면으로부터 20 m 높이의 절벽에서 다이빙한 지 x초 후의 높이를 y m라 하면,

$$y=-0.8x^2+20$$

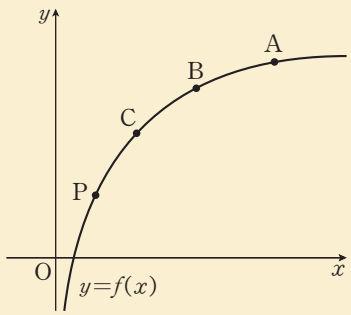
이 성립한다고 한다. $x=3$에서의 높이의 순간변화율을 구하시오.



미분계수의 기하적 의미

생각 열기 오른쪽 그림은 곡선 $y=f(x)$ 위의 네 점 A, B, C, P를 나타낸 것이다.

1. 점 P와 세 점 A, B, C를 잇는 직선을 각각 그려 보자.
2. 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점 Q가 세 점 A, B, C를 차례대로 지나 점 P에 한없이 가까워질 때, 두 점 P, Q를 잇는 직선은 어떤 직선에 한없이 가까워지는지 말해 보자.



함수의 그래프에서 미분계수의 기하적 의미를 알아보자.

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재한다고 하자.

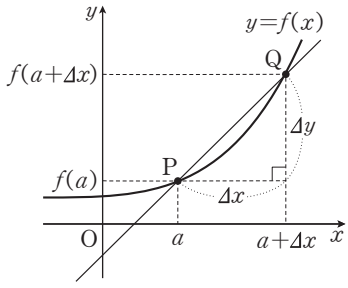
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

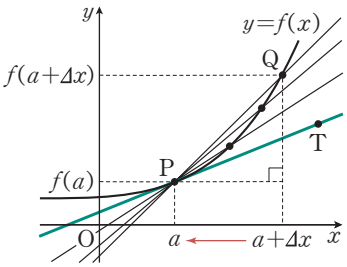
는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점

$$\mathrm{P}(a,\ f(a)),\ \mathrm{Q}(a+\Delta x,\ f(a+\Delta x))$$

를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



이때 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다.



따라서 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값은 직선 PT의 기울기와 같다.

이 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 이 접선의 접점이라고 한다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

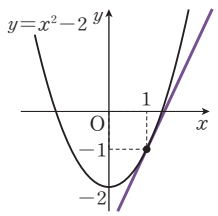


배로(Barrow, I., 1630~1677)
영국의 수학자로 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 곡선 위의 두 점을 잇는 직선의 극한을 이용하여 구했다.
(출처: 지즈강, 『수학의 역사』)

미분계수의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 3 곡선 $y=x^2-2$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.



풀이 $f(x)=x^2-2$라 하면 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-2\}-(-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(2+\Delta x)$$

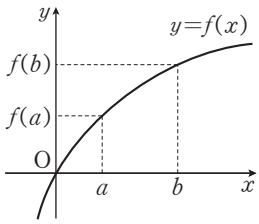
$$=2$$

답 2

문제 4 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

(1) $y=2x^2-3$ $(2, 5)$ (2) $y=-x^2+2x$ $(3, -3)$

탐구 **문제 5** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $0<a<b$일 때, 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이용하여 다음 세 값의 대소를 비교하시오.



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f'(a), \quad f'(b)$$

미분가능성과 연속성

다음을 통해 함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계를 알아보자.

함께하기 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재한다.

활동 1 다음은 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{\square}\times(x-a)\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\square}\times\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$=\square\times 0=0$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\square$$

활동 2 활동 1의 결과를 이용하여 함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계를 말해 보자.

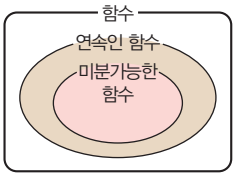
위의 활동에서 다음을 알 수 있다.

미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a}\{f(x)-k\}=0 \iff \lim_{x\to a} f(x)=k$ (단, k는 실수)

$f(x)$는 $x=a$에서 연속
(i) $f(a)$가 정의된다.
(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$



함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이지만 그 역은 성립하지 않음을 다음 예제를 통하여 알 수 있다.

예제 4 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이시오.

증명 $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

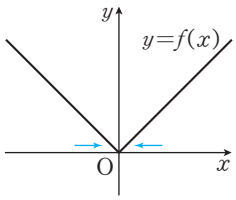
즉, 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다. 그런데

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$



이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

문제 6 함수 $f(x)=2|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이시오.

생각 넓히기

다음 두 함수의 그래프와 미분가능성 사이의 관계를 알아보자.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\le 2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\le 2) \\ 3x-6 & (x>2) \end{cases}$$

활동 ❶ 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프를 그려 보자.

활동 ❷ 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $x=2$에서의 미분가능성을 조사해 보자.

활동 ❸ 활동 ❶과 활동 ❷를 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프와 미분가능성 사이의 관계를 추측해 보자.

공학적 도구

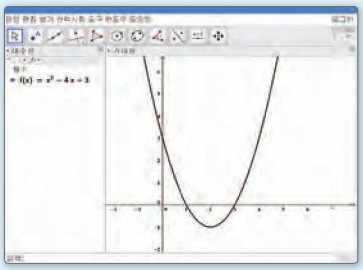
정보 처리

미분계수의 기하적 의미 확인하기

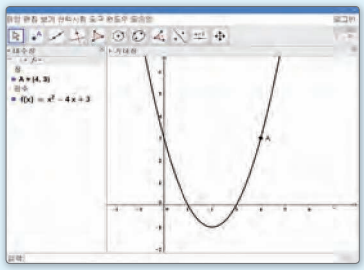
컴퓨터 프로그램을 이용하면 함수의 그래프와 곡선 위의 한 점에서의 접선을 그릴 수 있는 것은 물론, 확대 기능을 이용하여 특정 부분의 모양을 자세히 살펴볼 수도 있다.

다음과 같은 방법으로 곡선 $f(x)=x^2-4x+3$ 위의 점 $(4, 3)$에서의 접선을 그려 보고, $x=4$에서의 미분계수의 기하적 의미를 확인해 보자.

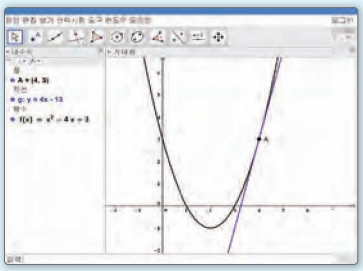
❶ 입력 창에 'x^2-4x+3'을 입력한 후 Enter를 누르면, 대수창에 함수 $f(x)=x^2-4x+3$의 식이 나타나고 기하창에 이것의 그래프가 그려진다.



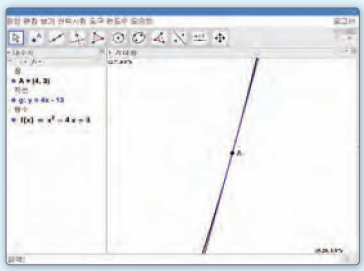
❷ 입력 창에 '(4, f(4))'를 입력한 후 Enter를 누르면 대수창에 점 A의 좌표 $(4, 3)$이 나타나고 기하창에 곡선 위의 점 A가 표시된다.



❸ 입력 창에 '접선(A, f)'를 입력한 후 Enter를 누르면 대수창에 곡선 위의 점 A에서의 접선의 방정식이 나타나고, 기하창에 곡선 위의 점 A에서의 접선이 그려진다. 이때 접선의 기울기가 4로 미분계수 $f'(4)$와 같음을 알 수 있다.



❹ 기하창의 점 A 위에 화살표를 두고 마우스 휠을 위로 돌려 점 A의 주변을 확대하면 곡선이 점점 접선과 가까워짐을 알 수 있다.



확인 위의 방법으로 곡선 $y=-x^2-2x+1$ 위의 점 $(-2, 1)$에서의 접선을 그려 보고, $x=-2$에서의 미분계수의 기하적 의미를 확인해 보자.

02 도함수

학습 목표

- 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

준비하기

다음 함수의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

(1) $y=-2x$ (2) $y=3x^2-1$

다가서기

시장의 물가가 오르내리는 것은 수요 공급의 법칙으로 설명할 수 있고, 제품을 생산하는 회사는 이익을 극대화하기 위해 시장의 수요에 따라 생산량을 조절한다. 이와 같이 회사를 효과적으로 경영하려면 여러 가지 변화하는 현상을 이해해야 한다.

이때 변화하는 현상을 표현하는 데 도함수의 개념이 사용된다.



도함수

생각 열기 다음 표는 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 나타낸 것이다.

a	$\cdots$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f'(a)$	$\cdots$	0	2		6		$\cdots$

❶ 위의 표를 완성해 보자.

❷ 위의 표로부터 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 추측하여 a에 대한 식으로 나타내어 보자.

함수 $y=f(x)$의 미분가능한 모든 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시킨 새로운 함수에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2a$$

로 a의 값에 따라 $f'(a)$가 하나씩 정해짐을 알 수 있다.

이때 a를 변수 x로 바꾸면 $f'(x)$는 x에 대한 함수가 되고

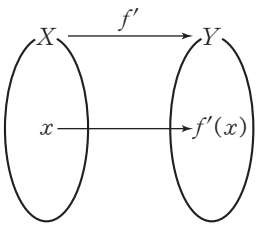
$$f'(x)=2x$$

와 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$의 미분가능한 모든 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는다.



이때 이 함수 $f'(x)$를 함수 $f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

$\frac{dy}{dx}$는 'dy dx'라고 읽는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$의 도함수는

$$f'(x)=2x,\quad y'=2x,\quad \frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{d}{dx}f(x)=2x$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도함수

미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

참고 $\Delta x=h$라 하면 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다.

함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 '$f(x)$를 x에 대하여 미분한다'고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

또, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

예제 1 $f(x)=x^2-x$의 도함수를 구하고, $x=-2$에서의 미분계수를 구하시오.

풀이
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-1)\\&=2x-1\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=2x-1$

$x=-2$에서의 미분계수는 $f'(-2)=2\times(-2)-1=-5$

답 $f'(x)=2x-1$, $f'(-2)=-5$

문제 1 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

(1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=x^2+5x$

(3) $f(x)=7$ (4) $f(x)=2x^3$

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 정의를 이용하여 구해 보자.

먼저 $n=1$이면 $y=x$이고, $f(x)=x$라 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

이다. 따라서 함수 $y=x$의 도함수는 $y'=1$이다.

이제 $n\geq 2$인 경우, $f(x)=x^n$이라 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}$$

$$=nx^{n-1}$$

이다. 따라서 함수 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$이다.

a^n-b^n
$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b$
$+\cdots+b^{n-1})$

자연수 $k(1\leq k\leq n)$에 대하여
$\lim_{h\to 0}(x+h)^{n-k}x^{k-1}$
$=x^{n-k}x^{k-1}$
$=x^{n-1}$

한편, 상수함수 $y=c$에서 $f(x)=c$라 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$=0$$

이다. 따라서 상수함수 $y=c$의 도함수는 $y'=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수

❶ $y=x$이면 $y'=1$

❷ $y=x^n$ ($n\geq 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

❸ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

보기 ① $y=x^9$이면 $y'=9x^{9-1}=9x^8$

② $y=1024$이면 $y'=0$

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하시오.

(1) $y=x^{15}$ (2) $y=x^{28}$

(3) $y=\frac{3}{4}$ (4) $y=(-2)^3$

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

다음을 통해 함수의 실수배, 두 함수의 합의 미분법에 대하여 알아보자.

함께하기 아래는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수

$y=cf(x)$ (c는 상수), $y=f(x)+g(x)$

의 도함수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

- 함수 $y=cf(x)$에 대하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\{\square\}}{h}$$

$$y'=c\lim_{h\to 0}\frac{\square}{h}=c\square$$

- 함수 $y=f(x)+g(x)$에 대하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{\square-f(x)\}+\{\square-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\square-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\square-g(x)}{h}$$

$$=\square+g'(x)$$

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재할 때,
$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$
(단, c는 상수)

$\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재할 때,
$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$
$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

위의 활동에서 함수 $y=cf(x)$ (c는 상수)의 도함수는

$$y'=cf'(x)$$

이고, 함수 $y=f(x)+g(x)$의 도함수는

$$y'=f'(x)+g'(x)$$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 함수 $y=f(x)-g(x)$의 도함수는

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

❶ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

❷ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

❸ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

› 함수의 합, 차의 미분법은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

예제 2 함수 $y=4x^2-3x+1$을 미분하시오.

풀이 $y'=(4x^2-3x+1)'=(4x^2)'-(3x)'+(1)'=4(x^2)'-3(x)'+(1)'$

$=4\times 2x-3\times 1+0=8x-3$

답 $y'=8x-3$

문제 3 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=7x^2-x-3$

(2) $y=-5x^2+6x+3$

(3) $y=-4x^3+3x^2-2x+1$

(4) $y=x^5+3x^3-2x^2+x$

함수의 곱의 미분법

두 함수의 곱의 미분법에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $y=f(x)g(x)$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

› 함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

생각톡톡

$y=\{f(x)\}^2$의 도함수는?

예제 3 함수 $y=(2x+1)(x^2-x+1)$을 미분하시오.

풀이 $y'=\{(2x+1)(x^2-x+1)\}'$

$=(2x+1)'(x^2-x+1)+(2x+1)(x^2-x+1)'$

$=2(x^2-x+1)+(2x+1)(2x-1)$

$=6x^2-2x+1$

답 $y'=6x^2-2x+1$

문제 4 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=(x+1)(4x-3)$

(2) $y=(x-8)(-2x^2+3x+1)$

(3) $y=(-x^2+2)(5x^2-9x)$

(4) $y=(x^2+6x)(x^3-7)$

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

두 함수의 곱의 미분법을 이용하면 미분가능한 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 곱으로 이루어진 함수 $y=f(x)g(x)h(x)$의 도함수도 구할 수 있다.

활동 1 함수 $y=f(x)g(x)h(x)$에 대하여

$$y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

가 성립함을 설명해 보자.

활동 2 함수 $y=(x-1)(-x^2+3)(x^2-x)$의 도함수를 다음 두 가지 방법으로 구해 보자.

[방법 1] 활동 1을 이용하여 미분하기

[방법 2] 식을 전개한 후 미분하기

수학 이야기

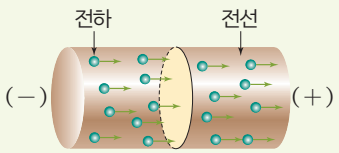
생활 속 도함수

미분이 실생활에 이용되는 예는 여러 가지 상황에서 찾아볼 수 있는데, 자연 과학과 사회 과학에서 다루는 여러 가지 현상에서도 도함수의 개념이 이용된다.

1 전하와 전류

전류는 전하의 흐름으로, 단위 시간 동안에 흐르는 전하의 양을 뜻한다. 전하의 양은 전하량 또는 전기량으로 부르는데, 단위는 C(쿨롬, coulomb)이다.

오른쪽 그림과 같이 전하가 전선의 한 단면을 통과할 때 시각 t에서의 전하량을 $Q(t)$라 하면, 시각의 변화량 Δt에 대한 전하의 변화량 ΔQ의 비가 그 시간 동안의 평균 전류이다. 즉,



$$(\text{평균 전류})=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

이다. 한편, 전류는 $\Delta t \longrightarrow 0$일 때 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$의 극한값이므로 시각 t에서의 전류는

$$(\text{전류})=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Q'(t)$$

와 같이 전하량 $Q(t)$의 도함수로 나타난다.

2 한계 비용

한 회사가 상품 x개를 생산할 때 소요되는 총경비 $C(x)$를 원가 함수라고 한다.

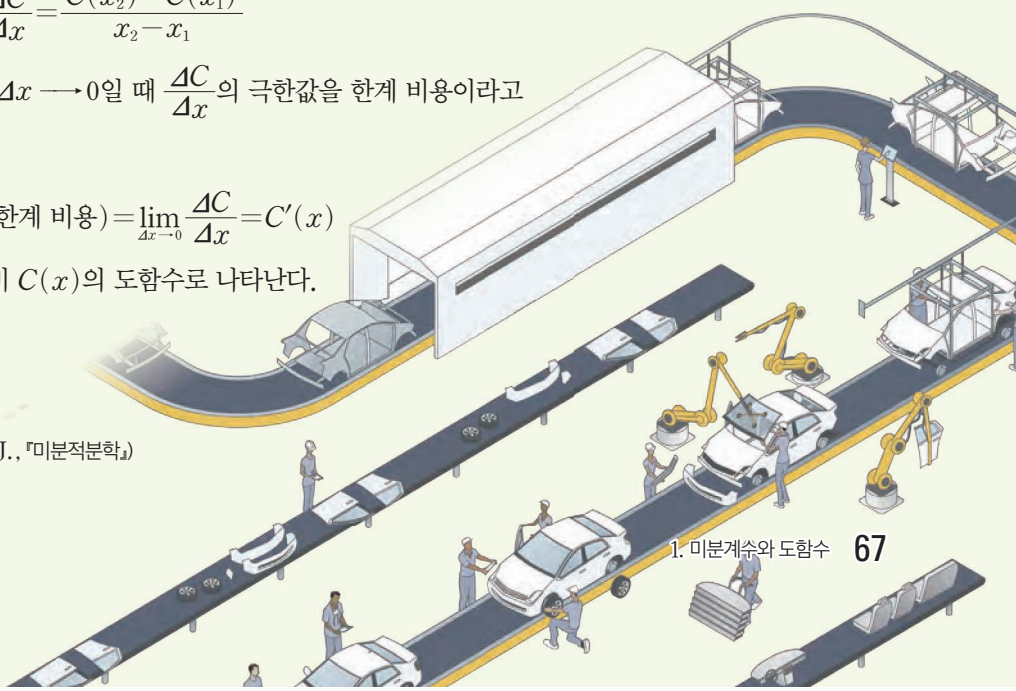
만일 생산된 상품이 x_1개에서 x_2개로 늘어났다면 추가적인 경비는 $C(x_2)-C(x_1)$원이 된다. 이때 생산량의 변화량 $\Delta x=x_2-x_1$에 대한 총경비의 변화량 $\Delta C=C(x_2)-C(x_1)$의 비가 생산 비용의 평균변화율이다. 즉,

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$$

이다. 여기서 $\Delta x \longrightarrow 0$일 때 $\frac{\Delta C}{\Delta x}$의 극한값을 한계 비용이라고 한다. 즉,

$$(\text{한계 비용})=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=C'(x)$$

와 같이 총경비 $C(x)$의 도함수로 나타난다.



(출처: Stewart, J., 『미분적분학』)

중단원 마무리하기

미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 **평균변화율**은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **미분계수**는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(3) **미분계수의 기하적 의미**

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

(4) **미분가능성과 연속성**

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

도함수

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$의 **도함수**는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) **함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 상수함수의 도함수**

❶ $y=x$이면 $y'=1$

❷ $y=x^n$ ($n\geq 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

❸ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

❶ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

❷ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

❸ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

❹ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

기본

01 함수 $f(x)=-x^2+7$에서 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

02 함수 $f(x)=x^3-x$의 $x=1$에서의 순간변화율을 구하시오.

03 곡선 $y=3x^2-4x-2$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

04 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$f(2)=-2$, $f'(2)=3$,

$g(2)=6$, $g'(2)=5$

일 때, 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수를 구하시오.

(1) $f(x)-2g(x)$ (2) $f(x)g(x)$

05 다음 함수를 미분하시오.

(1) $y=7x^5$

(2) $y=-x^4+3x^2+5$

(3) $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2-x$

(4) $y=(x+4)(-8x+1)$

표 준

|서·술·형|

06 함수 $f(x)=x^2+2x+2$에 대하여 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

07 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(-1)=4$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

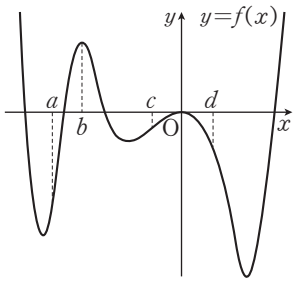
(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+3h)-f(-1)}{2h}$ (2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}$

08 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 5일 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

09 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 네 수

$$f'(a),\quad f'(b),\quad f'(c),\quad f'(d)$$

의 대소를 비교하시오.



10 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\le 1) \\ (x-1)^2 & (x>1) \end{cases}$의 $x=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

11 함수 $f(x)=x^2+ax-5$의 그래프 위의 점 $(2,\ -3)$에서의 접선의 기울기가 m일 때, 상수 a와 m의 값을 구하시오.

|서·술·형|

12 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $f(2)=-6$, $f'(0)=3$, $f'(1)=7$을 만족시키는 상수 a, b, c의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

13 다음 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<2) \\ x^2 & (x\geq 2) \end{cases}$$

14 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

15 자동차 x대를 생산하는 데 드는 생산 비용이

$$C(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+5x+1000 \text{ (만 원)}$$

일 때, 생산 비용의 순간변화율인 $C'(x)$를 한계 비용이라고 한다. 이때 자동차 100대를 생산하는 데 드는 한계 비용을 구하시오.



발 전

16 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$를 $f(2)$와 $f'(2)$에 대한 식으로 나타내시오.

17 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

를 만족시키고 $f'(7)=3$일 때, $f'(0)$의 값을 구하시오.

18 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $f'(0)=0$이면 $f(0)=0$이다.
ㄴ. 모든 실수 a에서 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$이다.
ㄷ. 모든 실수 x에서 $h(x)=h(-x)$이면 $h'(0)=0$이다.

19 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x^3+3x-1}=1$ (나) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$

|서·술·형|

20 다항식 $x^{10}-x^4+3x^2+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식

02 평균값 정리

03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

04 함수의 그래프

05 방정식과 부등식에의 활용

06 속도와 가속도

“미분법을 발견하는 수준과 마찬가지로 사랑하는 것도 재능의 수준을 뛰어넘어 천재성의 수준까지 다다를 수 있다.”

(출처: Gajdamschko, N., 『Theoretical Concerns: Vygotsky on Imagination Development』)



비고츠키(Vygotsky, L. S., 1896~1934)
옛 소련의 심리학자

이 글은 비고츠키가 인간의 행동 발달에서 감성이 중요함을 강조하며 한 말이다. 그는 10년 정도의 짧은 연구 기간 동안 탁월한 업적을 남기고 사망했기 때문에 ‘심리학계의 모차르트’라고 불린다.

01 접선의 방정식

학습 목표
접선의 방정식을 구할 수 있다.

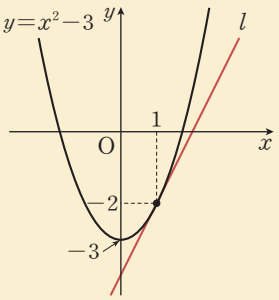
준비하기
점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하시오.

접선의 방정식

생각 열기 오른쪽 그림은 곡선 $y=x^2-3$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선 l을 그린 것이다.

❶ 접선 l의 기울기를 구해 보자.

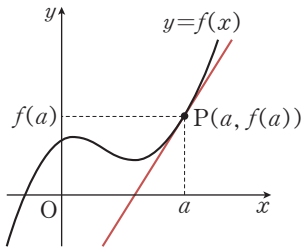
❷ 접선 l의 방정식을 구하는 방법에 대하여 말해 보자.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 미분계수를 이용하여 구해 보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선은 점 P를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

다가서기
2013년 1월 30일에 발사된 우리나라 최초의 우주 발사체인 나로호는 2단형 발사체로, 1단 로켓이 분리되어 떨어지는 순간에 2단 로켓은 날아온 경로의 접선 방향으로 계속 상승한다.
이 접선 방향은 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구해 알 수 있다.



예제 1 곡선 $y=x^2+2x+1$ 위의 점 $(-2, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

풀이 $f(x)=x^2+2x+1$이라 하면

$$f'(x)=2x+2$$

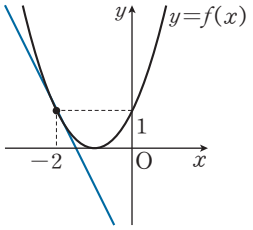
점 $(-2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=2\times(-2)+2=-2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=-2\{x-(-2)\}$$

즉, $y=-2x-3$



답 $y=-2x-3$

문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=-x^2+3x+5$ $(1, 7)$ (2) $y=x^3-3x-4$ $(0, -4)$

예제 2 곡선 $y=-2x^2+5x$에 접하고 기울기가 -3인 접선의 방정식을 구하시오.

접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓고 주어진 기울기를 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=-2x^2+5x$라 하면

$$f'(x)=-4x+5$$

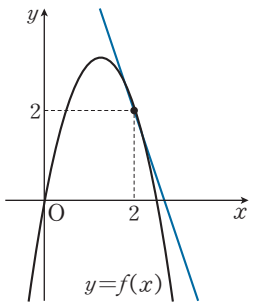
접점의 좌표를 $(a, -2a^2+5a)$라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$$f'(a)=-4a+5=-3, \quad \text{즉} \quad a=2$$

따라서 접점의 좌표가 $(2, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=-3(x-2)$$

즉, $y=-3x+8$



답 $y=-3x+8$

문제 2 다음 곡선에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=x^2-6x+2$ (2) $y=x^3-x$

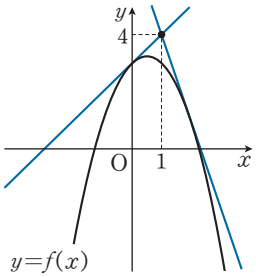
예제 3 점 $(1,\ 4)$에서 곡선 $y=-x^2+x+3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이 $f(x)=-x^2+x+3$이라 하면

$$f'(x)=-2x+1$$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+a+3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a+1$이므로 접선의 방정식은

$$y-(-a^2+a+3)=(-2a+1)(x-a) \quad \cdots\cdots ①$$



이 접선이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$$4-(-a^2+a+3)=(-2a+1)(1-a)$$

$$a^2-2a=0, \quad a(a-2)=0$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 ①에서

(i) $a=0$일 때, $y-3=x$이므로 $y=x+3$

(ii) $a=2$일 때, $y-1=-3(x-2)$이므로 $y=-3x+7$

답 $y=x+3$ 또는 $y=-3x+7$

문제 3 다음 곡선에 대하여 주어진 점에서 그은 접선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=2x^2-3x+2 \quad (-1,\ -1)$

(2) $y=x^3 \quad (0,\ 2)$

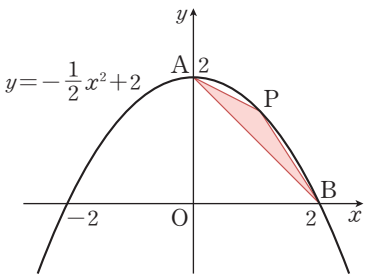
생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$에 대하여 곡선 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하다.

활동 1 점 P의 좌표를 구해 보자.

활동 2 삼각형 PAB의 넓이를 구해 보자.

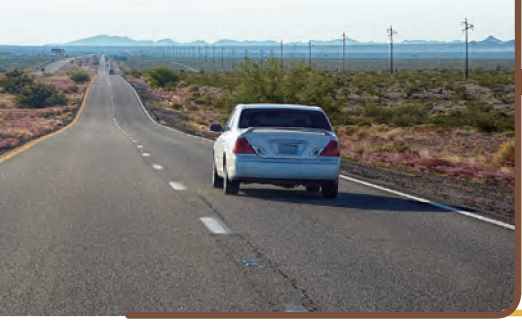


02 평균값 정리

학습 목표
함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

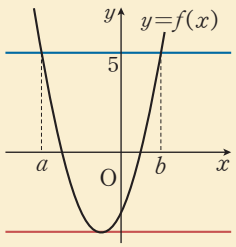
준비하기
함수 $f(x)=x^2+3x$의 연속성을 조사하시오.

다가서기
어떤 자동차가 2시간 동안 180 km를 달렸다면, 이 자동차의 평균속도는 시속 90 km이므로 그 시간 동안에 적어도 한 번은 시속 90 km로 달렸던 순간이 있다는 뜻이다.
이때 자동차의 평균속도는 함수의 평균변화율로, 순간속도는 순간변화율로 생각할 수 있다.
여기서는 어떤 구간에서의 평균변화율과 순간변화율이 같아지는 순간을 미분의 성질을 이용하여 구하는 방법에 대하여 알아본다.



롤의 정리

생각 열기 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=x^2+2x-3$의 그래프이다.



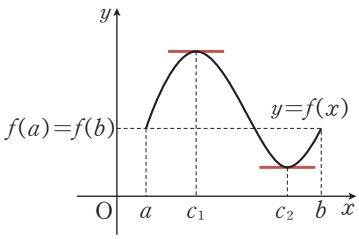
❶ $f(a)=f(b)=5$를 만족시키는 상수 a, b의 값을 구해 보자. (단, $a<b$)

❷ $f'(c)=0$을 만족시키는 상수 c의 값을 구해 보자.

❸ ❷에서 구한 c가 a와 b 사이에 있음을 확인해 보자.

위의 **생각 열기**에서 $f(-4)=f(2)=5$이고, $f'(-1)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가 -4와 2 사이에 존재함을 알 수 있다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 오른쪽 그림과 같이 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$는 기울기가 0인 접선을 갖는다.



즉, $f'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

일반적으로 다음이 성립하고, 이를 **롤의 정리**라고 한다.

롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

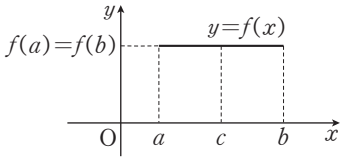
$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

롤의 정리는 프랑스의 수학자 롤(Rolle, M., 1652~1719)의 이름을 딴 것이다.

롤의 정리를 증명해 보자.

(i) 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우



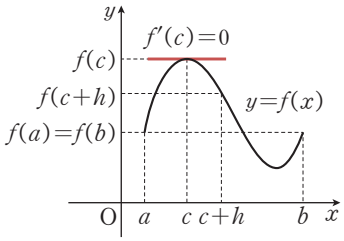
열린구간 (a, b)에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.

(ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다. 그런데 $f(a)=f(b)$이므로 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

$f(x)$가 $x=c$에서 최댓값을 가질 때,
$h>0$이면 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$
$h<0$이면 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$

① $f(x)$가 $x=c$에서 최댓값을 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(c+h)-f(c)\le 0$이므로



$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$$

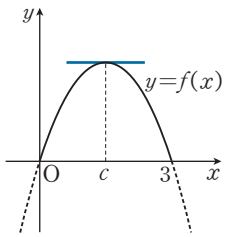
이다. 그런데 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 우극한과 좌극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

② $f(x)$가 $x=c$에서 최솟값을 가질 때도 ①과 같은 방법으로 $f'(c)=0$임을 증명할 수 있다.

예제 1 함수 $f(x)=-x^2+3x$에 대하여 닫힌구간 $[0, 3]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

풀이 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=0$이다.



따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+3$에서 $f'(c)=-2c+3=0$이므로

$$c=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

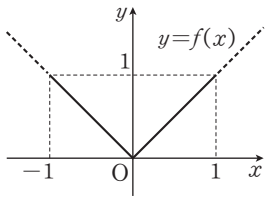
문제 1 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2-6x+1 \quad [1, 5]$

(2) $f(x)=x^3-x^2-5x-3 \quad [-1, 3]$

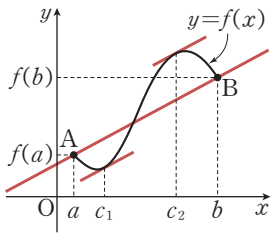
탐구

문제 2 함수 $f(x)=|x|$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만 롤의 정리를 만족시키지 않는 이유를 말하시오.



평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.



이때 오른쪽 그림과 같이 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$는 기울기가 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 접선을 갖는다.

즉, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

일반적으로 다음이 성립하고, 이를 **평균값 정리**라고 한다.

› 평균값 정리는 열린구간 (a, b)에서 직선 AB와 평행한 접선을 갖는 점이 곡선 위에 적어도 하나 존재함을 뜻한다.

생각톡톡

롤의 정리와 평균값 정리의 차이점은 무엇일까?

평균값 정리

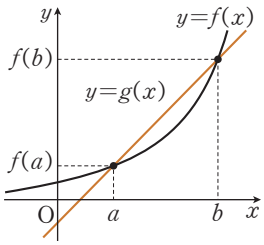
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

다음을 통해 평균값 정리가 성립함을 확인해 보자.

함께하기 함수 $f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면



$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

활동 ❶ $h(a)$, $h(b)$의 값을 각각 구하여 비교해 보자.

활동 ❷ 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 이용하여 다음을 확인해 보자.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

어떤 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이면 그 구간에서 함수 $f(x)-g(x)$도 연속이다. 또, 어떤 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하면 그 구간에서 함수 $f(x)-g(x)$도 미분가능하다.

예제 2 함수 $f(x)=x^2-4x+2$에 대하여 닫힌구간 $[1, 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

풀이 $f(x)=x^2-4x+2$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로, 평균값 정리에 의하여

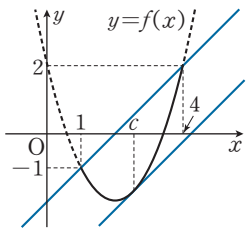
$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f(1)=-1$, $f(4)=2$, $f'(c)=2c-4$이므로

$$\frac{2-(-1)}{4-1}=2c-4, \qquad 1=2c-4$$

따라서 $c=\frac{5}{2}$



답 $\frac{5}{2}$

문제 3 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=2x^2-3x+1$ $[0, 2]$

(2) $f(x)=x^3+x-1$ $[-1, 3]$

예제 3 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자. 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면, $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 보이시오.

증명 $a<x\le b$인 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린구간 (a, x)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(c)=0$이므로

$$f(x)-f(a)=0, \quad \text{즉} \quad f(x)=f(a)$$

따라서 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

문제 4 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자. 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이면, $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)=g(x)+k$(k는 상수)임을 보이시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | **의사소통** | 정보 처리 | 태도 및 실천

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하다.

활동 1 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값이 될 수 있는 가장 큰 값을 구해 보자.

$$f'(x)\le 7, \quad f(0)=-5$$

활동 2 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$가 존재하는지 말해 보자.

$$f(0)=-2, \quad f(4)=6, \quad f'(x)<2$$

수학 이야기

평균값 정리의 조건

수학을 공부하면서 꼭 알아야 하는 정리가 많지만 미분과 관련된 것 중에서는 평균값 정리가 가장 중요하게 쓰인다. 그런데 이 정리는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해서만 적용할 수 있다.

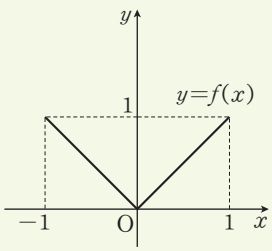
여기서는 이 두 가지 조건 중에서 하나라도 빠지면 평균값 정리가 성립하지 않는 예를 살펴보기로 한다.

1 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서는 연속이지만 열린구간 (a, b)에서 미분가능하지 않은 경우

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 이때

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-1}{2}=0$$

이지만, $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않기 때문에 평균값 정리가 성립하지 않음을 알 수 있다.



2 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서는 미분가능하지만 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이 아닌 경우

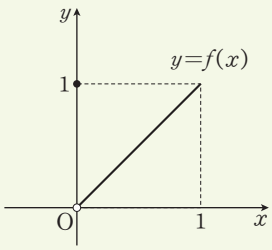
오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ x & (0<x\leq 1)\end{cases}$$

는 열린구간 $(0, 1)$에서는 $f'(x)=1$로 미분가능하지만 $x=0$에서 불연속이다. 이때

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-1}{1}=0$$

이지만, $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 존재하지 않기 때문에 평균값 정리가 성립하지 않음을 알 수 있다.



03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

학습 목표
함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

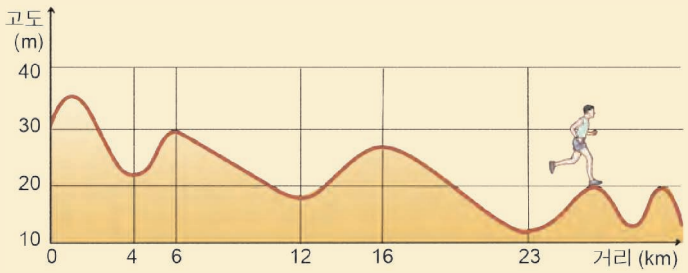
준비하기
함수 $y=-2x^2+5x-2$의 그래프를 그리시오.

다가서기
건강에 영향을 미치는 미세 먼지에 대한 관심이 높아지면서 일기 예보에서도 미세 먼지의 농도와 주의 사항을 알려 주고 있다.
시간에 따른 미세 먼지의 농도를 함수로 나타내면 미분을 이용하여 미세 먼지가 증가하는 시간대와 감소하는 시간대를 예측할 수 있다.



함수의 증가와 감소

생각 열기 다음 그림은 제87회 서울 국제 마라톤 대회 코스의 고도를 대략적으로 나타낸 그래프이다.



▶ 마라톤 코스의 4 km 지점부터 23 km 지점 사이에서 고도가 높아지고 있는 구간과 고도가 낮아지고 있는 구간을 각각 말해 보자.

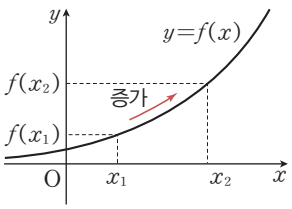
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

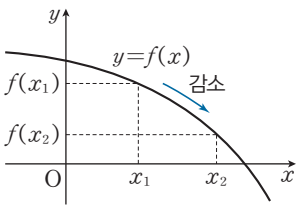
$x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$

이면, $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다. 또,

$x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$

이면, $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.





예를 들어 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $[0, \infty)$에 속하는 x_1, x_2에 대하여

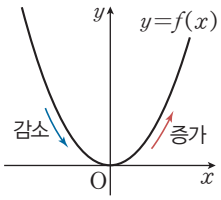
$x_1<x_2$일 때 $x_1^2<x_2^2$

이므로 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

또, 구간 $(-\infty, 0]$에 속하는 x_1, x_2에 대하여

$x_1<x_2$일 때 $x_1^2>x_2^2$

이므로 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소한다.



문제 1 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

(1) $f(x)=-x^2+2$ (2) $f(x)=2x^2-4x-1$

이제 함수의 증가와 감소를 도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면 이 구간에 속하는 두 수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 평균값 정리가 성립하므로

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 적어도 하나 존재한다.

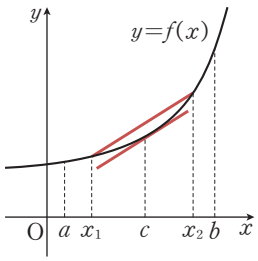
이때 $f'(x)$의 부호에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$

이면 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0$이고 $x_2-x_1>0$이므로

$f(x_2)-f(x_1)>0$, 즉 $f(x_1)<f(x_2)$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

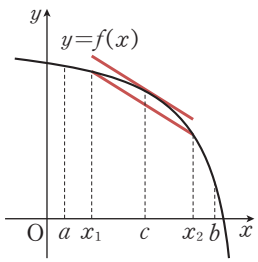


(ii) 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$

이면 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)<0$이고 $x_2-x_1>0$이므로

$f(x_2)-f(x_1)<0$, 즉 $f(x_1)>f(x_2)$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

❶ $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

❷ $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

주의 위의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하지만, $f'(x)=3x^2$에서 $f'(0)=0$이다.

예제 1 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

(1) $f(x)=x^3+6x^2+9x+1$ (2) $f(x)=x^3-3x^2+3x$

풀이 (1) $f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$이므로

$x<-3$ 또는 $x>-1$일 때 $f'(x)>0$

$-3<x<-1$일 때 $f'(x)<0$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3]$과 구간 $[-1, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-3, -1]$에서 감소한다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

(2) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이므로

$x\neq 1$인 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$과 구간 $[1, \infty)$에서 증가하므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

답 풀이 참조

표에서 ↗는 증가를 나타내고, ↘는 감소를 나타낸다.

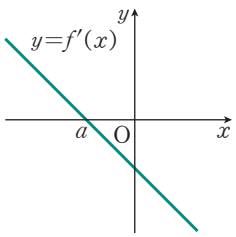
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 증가하면 최대·최소 정리에 의하여 $f(a)$가 최솟값, $f(b)$가 최댓값이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서도 증가한다. 함수 $f(x)$가 감소하는 경우도 마찬가지이다.

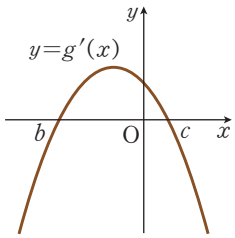
문제 2 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

(1) $f(x)=x^3-12x+1$ (2) $f(x)=-2x^3-6x^2+18x$

탐구

문제 3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f(x)$와 $g(x)$의 증가와 감소를 각각 조사하고, 그 결과를 친구와 비교하시오.

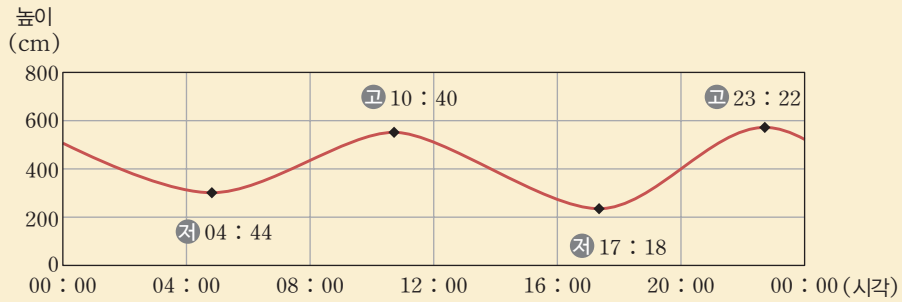




함수의 극대와 극소

국립해양조사원은 바다에 대한 연구 및 안전한 항해, 해양 자원 개발 등을 위해 설립된 기관으로, 누리집(www.khoa.go.kr)을 통해 조석, 해류, 조류 등을 예보한다.

생각 열기 다음은 국립해양조사원에서 예보한 어느 날의 충남 보령시 부근 해수면의 높이이다.



❶ 해수면의 높이가 바로 전과 후보다 더 높을 때의 시각을 말해 보자.

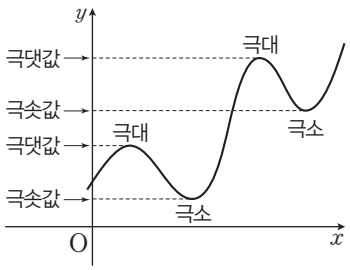
❷ 해수면의 높이가 바로 전과 후보다 더 낮을 때의 시각을 말해 보자.

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에서 $f(a)$의 값이 가장 큰 경우와 가장 작은 경우에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하며, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하며, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



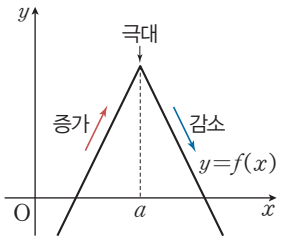
생각 톡톡

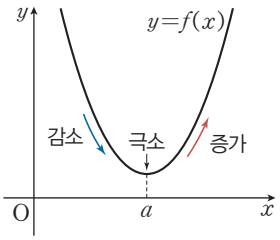
상수함수는 극값을 가질까?

특히, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우에는 다음이 성립한다.

(i) $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(ii) $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.





미분가능한 함수의 극값과 미분계수 사이의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극대라 하자.

이때 절댓값이 충분히 작은 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(a+h)\leq f(a)$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0,\quad \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0$$

이다. 그런데 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 우극한과 좌극한이 같다.

따라서 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$이 성립한다.

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이다.

같은 방법으로 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극소일 때도 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

극값과 미분계수 사이의 관계

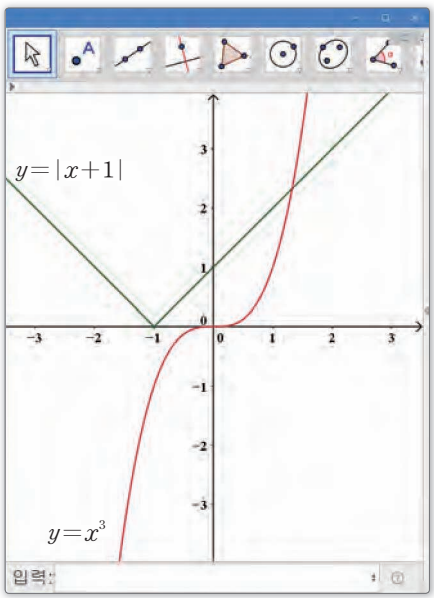
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

> 이것의 역은 성립하지 않는다. 즉, $f'(a)=0$이지만 $x=a$에서 극값을 갖지 않는 경우도 있다.

탐구

문제 4 다음은 두 함수 $y=x^3$과 $y=|x+1|$의 극값과 미분계수 사이의 관계에 대한 수지와 민수의 생각이다.

수지와 민수의 생각은 각각 어떤 함수에 대한 것인지 말하고 그 이유를 설명하시오.



수지



함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖더라도 $f'(a)$가 존재하지 않을 수도 있어.

민수

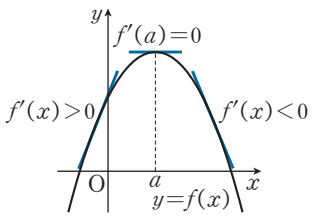


함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이어도 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖지 않을 수 있어.

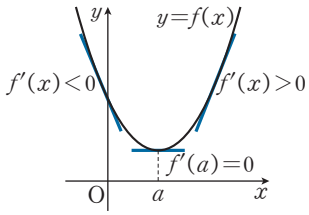
이제 다음을 통해 미분가능한 함수의 극대와 극소에 대하여 알아보자.

함께하기 다음은 도함수의 부호를 조사하여 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정하는 과정이다. □ 안에 증가, 감소, 극대, 극소 중에서 알맞은 말을 써넣어 보자.

활동 ❶ $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 □하다가 □하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 □이다.



활동 ❷ $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 □하다가 □하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 □이다.



위의 활동에서 다음을 알 수 있다.

함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

❶ $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

❷ $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

예제 2 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$의 극값을 구하시오.

› $f'(x)=0$인 x의 값을 구하고, 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 8이며, $x=3$에서 극소이고 극솟값은 4이다.

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	8	↘	4	↗

답 극댓값: 8, 극솟값: 4

문제 5 다음 함수의 극값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x$ (2) $f(x)=x^4-8x^2-2$

예제 3 함수 $f(x)=ax^3+3x^2+bx+5$가 $x=-1$에서 극솟값 -2를 갖는다고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 상수 a, b의 값 (2) $f(x)$의 극댓값

> 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

풀이 (1) $f'(x)=3ax^2+6x+b$

$f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -2를 가지므로 $f'(-1)=0$, $f(-1)=-2$

$f'(-1)=3a-6+b=0$에서 $3a+b=6$ …… ①

$f(-1)=-a+3-b+5=-2$에서 $a+b=10$ …… ②

①과 ②를 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=12$

(2) $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+5$이므로

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 25를 갖는다.

x	…	-1	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	25	↘

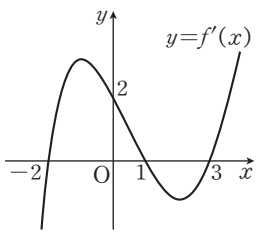
답 (1) $a=-2$, $b=12$ (2) 25

문제 6 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$이 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖는다고 할 때, 상수 a, b의 값과 극솟값을 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



활동 1 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 구해 보자.

활동 2 활동 1에서 구한 x의 값에서 $f(x)$가 극댓값을 갖는지 극솟값을 갖는지 조사해 보자.

탐구 & 융합

창의·융합 | 의사소통 | 태도 및 실천

탄산수 속 기포와 이산화탄소

탄산수를 컵에 따르면 구 모양의 기포 알갱이가 발생하는데, 큰 기포는 급격히 커지면서 수면으로 올라가 터지고 작은 기포는 더 작아져서 사라져 버리는 현상을 볼 수 있다.

탄산수의 기포는 왜 점점 커져서 터지거나 작아져서 사라질까?

그 원리는 다음과 같다.

❶ 이산화탄소는 액체로 녹아 있는 것보다 기체로 있는 것이 더 안정적이어서 기체 상태에 도달하려는 성질이 있다. 따라서 기포 알갱이의 반지름의 길이를 r라 할 때, 알갱이의 부피 $\frac{4}{3}\pi r^3$이 커질수록 에너지는 작아진다.

❷ 기포 알갱이와 액체의 경계에는 표면 장력이 작용하여 겉넓이를 작게 하려고 한다. 따라서 기포 알갱이의 겉넓이 $4\pi r^2$이 커짐에 따라 에너지도 커진다.

❶과 ❷로부터 반지름의 길이가 r인 기포 알갱이의 에너지 $E(r)$는

$$E(r)=-a\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)+b(4\pi r^2)\ (a,\ b\text{는 양수})$$

으로 나타낼 수 있다.

그런데 기포 알갱이는 되도록 작은 에너지를 가지려고 하기 때문에, 함수 $E(r)$가 극대가 되는 r의 값을 r_0이라 할 때 $r<r_0$인 기포는 사라지고 $r>r_0$인 기포는 수면으로 올라가서 터지게 된다.

(출처: 히로유키 코지마, 『만화로 쉽게 배우는 미분적분』)



탐 구 위의 함수 $E(r)$에 대하여 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$일 때, 다음에 답해 보자.

1 함수 $E(r)$가 극댓값을 갖는 r_0의 값을 구하시오.

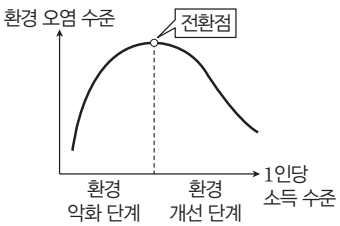
2 $r=\frac{1}{2}$일 때의 기포 알갱이와 $r=\frac{3}{4}$일 때의 기포 알갱이의 상태는 어떻게 되는지 각각 말하시오.

04 함수의 그래프

학습 목표
함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

준비하기
닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=x^2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

다가서기
국민의 생활 수준과 환경 오염 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것을 '환경 쿠즈네츠 곡선'이라 하는데, 이 곡선을 통하여 경제 수준이 높아지면 환경 오염이 줄어드는 것을 알 수 있다.



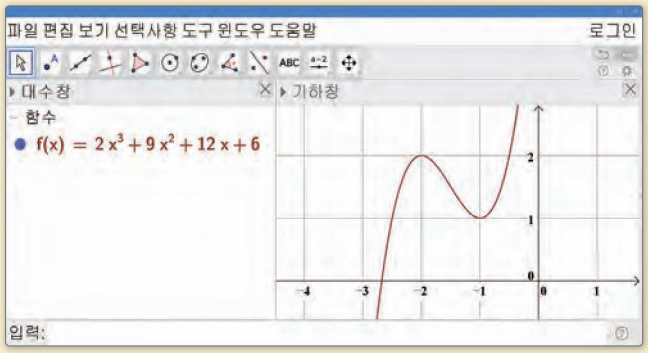
환경 쿠즈네츠 곡선

이와 같이 함수의 그래프를 분석하여 다양한 정보를 얻을 수 있으므로 함수의 그래프의 개형을 아는 것은 중요하다. 미분을 이용하면 함수의 그래프의 개형을 쉽게 그릴 수 있다.



함수의 그래프

생각 열기 다음은 함수 $f(x)=2x^3+9x^2+12x+6$의 그래프를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 그린 것이다.



❶ 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0		0	
$f(x)$	↗	2			

❷ ❶의 표에서 화살표 방향과 그래프의 모양을 비교해 보자.

함수의 그래프의 개형은 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점 등을 이용하여 그릴 수 있다.

개형(槪形)은 대략적인 모양을 뜻한다.

미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때는 다음과 같은 과정을 따르면 편리하다.

❶ 도함수 $f'(x)$를 구한다.
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
❸ $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 극값을 구한다.
❹ $f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

예제 1 함수 $f(x)=x^3+3x^2-2$의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

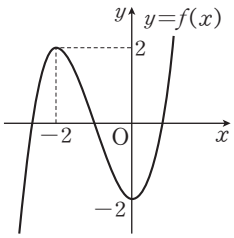
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

$f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 2를 갖고, $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-2$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 1 다음 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $f(x)=-2x^3-3x^2+4$ (2) $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

예제 2 함수 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이 $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

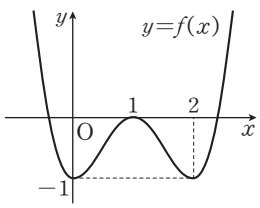
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

$f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극솟값 -1을 갖고, $x=1$에서 극댓값 0을 갖는다.

따라서 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

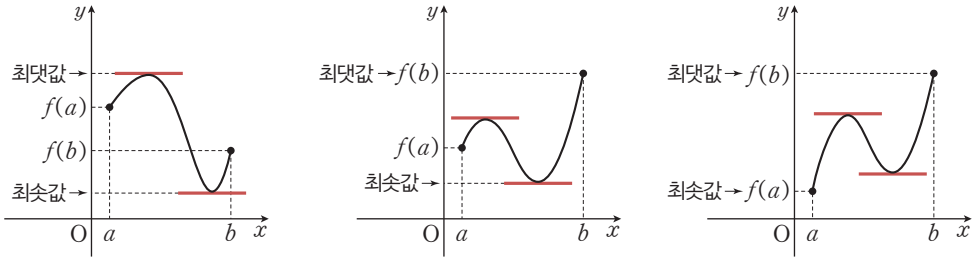
문제 2 다음 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $f(x)=x^4-2x^3+3$ (2) $f(x)=-2x^4+4x^2-1$

함수의 최대와 최소

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.



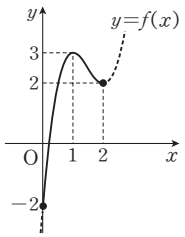
극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.

예제 3 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	0	⋯	1	⋯	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−2	↗	3	↘	2

따라서 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 −2이다.

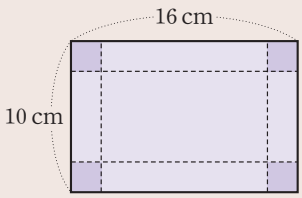
답 최댓값: 3, 최솟값: −2

문제 3 주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

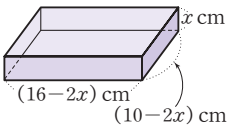
(1) $f(x)=-x^3+3x^2+1$ $[-1, 3]$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2x$ $[-2, 2]$

예제 4 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 16 cm, 10 cm인 직사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라 내고, 나머지 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다.
이 상자의 부피가 최대가 되도록 하려면 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 몇 cm로 해야 하는지 구하시오.



종이를 접어 상자를 만들면 다음과 같다.



풀이 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm, 상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$$V(x)=x(16-2x)(10-2x)=4x^3-52x^2+160x \ (0<x<5)$$

$$V'(x)=12x^2-104x+160=4(x-2)(3x-20)$$

$0<x<5$이므로 $V'(x)=0$에서 $x=2$

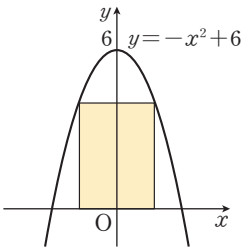
열린구간 $(0, 5)$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	2	⋯	5
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	144	↘	

$x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 잘라 내는 정사각형 한 변의 길이가 2 cm일 때, 상자의 부피는 최대가 된다.

답 2 cm

문제 4 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+6$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.



문제 5 어느 의류 업체에서 A 티셔츠를 주문 제작하여 n벌을 판매할 때 생기는 이익이 $(-n^3+450n^2)$원이라고 한다. 다음에 답하시오. (단, $0<n<450$)

(1) 이 업체에서 A 티셔츠를 100벌 판매할 때 생기는 이익을 구하시오.

(2) 이 업체에서 A 티셔츠의 판매 이익이 최대가 되려면 A 티셔츠를 몇 벌 판매해야 하는지 구하시오.



탐구 & 융합

통조림 캔의 부피가 최대가 되려면?

문제 해결 | 창의·융합 | 태도 및 실천

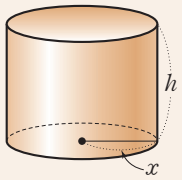


우리 생활에서 가장 많이 사용하는 용기의 모양은 원기둥인데, 그 부피는 밑면의 반지름의 길이와 높이에 의하여 결정된다.

겉넓이가 일정한 원기둥의 부피는 밑면의 지름의 길이와 높이가 같을 때 최대가 된다고 알려져 있는데, 오른쪽 그림과 같은 통조림이 이러한 경우이다.

여기서는 밑면의 반지름의 길이와 높이의 합이 일정한 경우에 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 반지름의 길이와 높이를 구해 보자.

밑면의 반지름의 길이 x와 높이 h의 합이 10인 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 x와 h의 값을 구해 보자.



풀이 $x+h=10$, 즉 $h=10-x$이므로 원기둥의 부피 V는

$$V(x)=\pi x^2(10-x)=\pi(-x^3+10x^2)\ (0<x<10)$$

$$V'(x)=\pi(-3x^2+20x)=-\pi x(3x-20)$$

$0<x<10$이므로 $V'(x)=0$에서 $x=\dfrac{20}{3}$

이것을 $x+h=10$에 대입하면 $h=\dfrac{10}{3}$

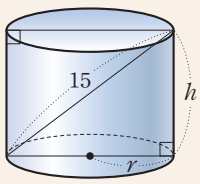
열린구간 $(0, 10)$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같으므로 $x=\dfrac{20}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

x	0	…	$\frac{20}{3}$	…	10
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$\frac{4000}{27}\pi$	↘	

따라서 밑면의 반지름의 길이가 $x=\dfrac{20}{3}$이고 높이가 $h=\dfrac{10}{3}$일 때 원기둥의 부피는 최대가 된다.

답 $x=\dfrac{20}{3}$, $h=\dfrac{10}{3}$

탐구 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 지름을 포함하고 밑면에 수직인 평면으로 자른 도형의 대각선의 길이가 15로 일정하다고 한다. 이때 원기둥의 부피 V를 h에 대한 식으로 나타내고 V의 최댓값을 구해 보자.



05 방정식과 부등식에의 활용

학습 목표

방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

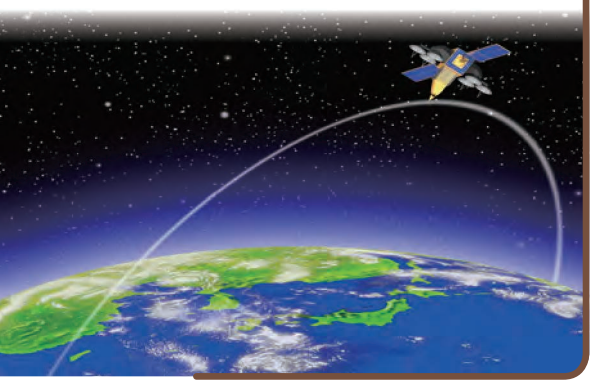
준비하기

1 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 실근의 개수를 구하시오.

2 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+x+1>0$이 성립함을 보이시오.

다가서기

인공위성의 지구의 공전 궤도를 유지하기 위한 속력을 구하거나 로켓의 지구 탈출 속도를 구하기 위해서는 방정식이나 부등식을 풀어야 한다. 방정식의 실근의 개수를 구하거나 부등식이 성립함을 보일 때 미분을 활용할 수 있다.

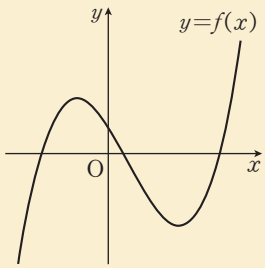


방정식에의 활용

생각 열기 오른쪽 그림은 함수 $f(x)$의 그래프이다.

❶ $f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 말해 보자.

❷ 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 말해 보자.



함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구해 보자.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

예제 1 방정식 $x^3-6x^2+9x-2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

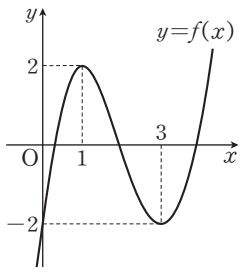
풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗



$f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-6x^2+9x-2=0$의 서로 다른 실근은 3개이다.

답 3

문제 1 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

(1) $x^3-3x^2+3x+4=0$ (2) $2x^4-4x^2+1=0$

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점의 x 좌표이다.

방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 때, 주어진 방정식을 $f(x)=g(x)$의 꼴로 변형한 후, $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하여 구할 수도 있다.

예제 2 방정식 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

풀이 $x^3-3x-k=0$에서 $x^3-3x=k$이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 두 함수 $y=x^3-3x$와 $y=k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

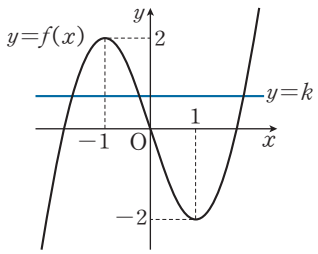
$f(x)=x^3-3x$라 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



따라서 방정식 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$$-2<k<2$$

답 $-2<k<2$

탐구 **문제 2** 방정식 $2x^3+6x^2+k=0$의 서로 다른 실근의 개수를 실수 k의 값의 범위에 따라 조사하려고 한다. 다음에 답하시오.

(1) $f(x)=2x^3+6x^2$이라 할 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오.

(2) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수를 k의 값의 범위에 따라 조사하시오.

(3) (2)의 결과를 이용하여 방정식 $2x^3+6x^2+k=0$의 서로 다른 실근의 개수를 k의 값의 범위에 따라 말하시오.

부등식에의 활용

함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명해 보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 보이려면 그 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

또, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이려면 그 구간에서 $f(x)-g(x) \geq 0$임을 보이면 된다.

두 식 A, B에 대하여
$A \geq B \Longleftrightarrow A-B \geq 0$
$A \leq B \Longleftrightarrow A-B \leq 0$

예제 3 $x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3 \geq 3x^2-4$가 성립함을 보이시오.

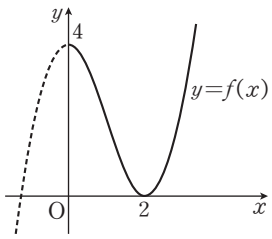
증명 $f(x)=x^3-(3x^2-4)=x^3-3x^2+4$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, \infty)$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗



$x \geq 0$일 때 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$$f(x) \geq 0, \quad \text{즉} \quad x^3-3x^2+4 \geq 0$$

따라서 $x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3 \geq 3x^2-4$가 성립한다.

문제 3 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

(1) $x \geq 0$일 때, $2x^3-3x^2 \geq -1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^4-4x \geq -3$

문제 4 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x^4-4x^3 \geq k$$

가 성립하도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

탐구 & 융합

삼차함수의 도함수를 이용한 실근의 개수 판별

문제 해결 | 태도 및 실천

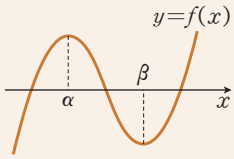
x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호를 이용하여 실근의 개수를 판별할 수 있다. 여기서는 x에 대한 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a>0)$의 실근의 개수를 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$의 도함수를 이용하여 판별하는 방법에 대하여 알아보자.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이므로, 이차방정식 $f'(x)=0$의 근의 종류에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

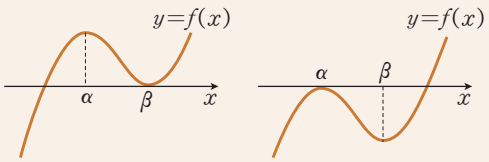
(1) 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

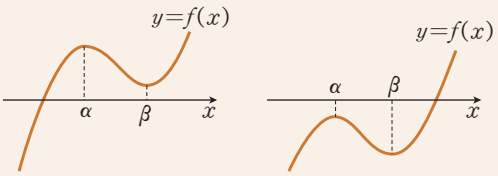
① $f(\alpha)f(\beta)<0$일 때: 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 실근을 갖는다. ➡ 실근의 개수는 3



② $f(\alpha)f(\beta)=0$일 때: 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같이 두 가지인데, 두 그래프 모두 중근과 하나의 실근, 즉 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ 실근의 개수는 2

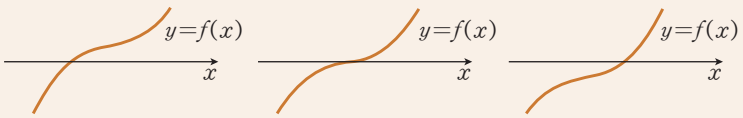


③ $f(\alpha)f(\beta)>0$일 때: 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같이 두 가지인데, 두 그래프 모두 하나의 실근을 갖는다. ➡ 실근의 개수는 1



(2) 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가질 때

그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로, 항상 하나의 실근을 갖게 된다. ➡ 실근의 개수는 1

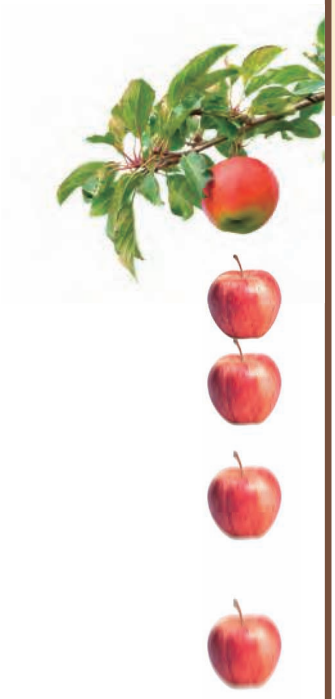


탐구 삼차방정식 $x^3-6x^2-15x+k=0$의 실근의 개수를 실수 k의 값의 범위에 따라 조사해 보자.

06 속도와 가속도

학습 목표
속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

준비하기
함수 $f(x)=-5x^2+7$의 $x=4$에서의 미분계수를 구하시오.



다가서기
곧게 뻗은 선로를 달리는 기차, 직선 도로를 주행하는 자동차, 나무에서 떨어지는 사과, 수직으로 쏘아 올린 물 로켓 등과 같이 직선 운동을 하고 있는 물체의 순간속도와 가속도에 대한 문제는 미분을 이용하여 해결할 수 있다.

속도와 가속도

생각 열기 지면으로부터 10 m 높이에서 초속 25 m로 지면과 수직인 방향으로 야구공을 던졌을 때, t초 후의 야구공의 높이를 $f(t)$ m라 하면

$$f(t)=-5t^2+25t+10$$

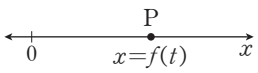
이라고 한다.

❶ t의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때, $f(t)$의 평균변화율을 구해 보자.

❷ ❶에서 $h \longrightarrow 0$일 때, 평균변화율의 극한값을 구해 보자.

수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도에 대하여 알아보자.

점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치를 x라 하면 x는 t에 대한 함수이므로 $x=f(t)$와 같이 나타낼 수 있다.



이때 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 위치의 변화량 Δx는

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$

이므로 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

이다. 이것은 함수 $x=f(t)$의 평균변화율이다.

여기서 위치 $x=f(t)$의 시각 t에서의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라 하며 보통 v로 나타낸다. 즉, 속도 v는 다음과 같다.

$$v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

속도의 절댓값 $|v(t)|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

한편, 속도 v의 시각 t에서의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라 하며 보통 a로 나타낸다. 즉, 가속도 a는 다음과 같다.

$$a=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=v'(t)$$

위치

↓ 미분

속도

↓ 미분

가속도

이상을 정리하면 다음과 같다.

속도와 가속도

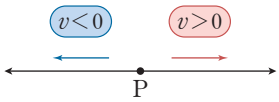
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t), \qquad a=\frac{dv}{dt}=v'(t)$$

수직선 위를 움직이는 점 P의 운동 방향은 속도 $v=f'(t)$의 부호에 따라서 다음과 같다.

(i) $v>0$이면, $x=f(t)$가 증가하므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

(ii) $v<0$이면, $x=f(t)$가 감소하므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



예제 1 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=3t^2-12t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도

(2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각

풀이 (1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t-12, \quad a=\frac{dv}{dt}=6$$

따라서 $t=1$에서의 속도와 가속도는 $v=6\times1-12=-6$, $a=6$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=6t-12=0$에서 $t=2$

답 (1) 속도: -6, 가속도: 6 (2) 2

문제 1 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=\frac{1}{3}t^3-4t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도 (2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각

예제 2 수평인 지면으로부터 25 m 높이에서 20 m/s의 속도로 수직으로 위로 던져 올린 물체의 t초 후의 높이 x m가 $x=25+20t-5t^2$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그때의 높이

(2) 물체가 지면에 닿는 순간의 속도



풀이 (1) t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=20-10t$

최고 높이에서 물체의 속도는 0 m/s이므로

$v=20-10t=0$에서 $t=2$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 그때의 높이는

$x=25+20\times2-5\times2^2=45\,(\text{m})$

(2) 물체가 지면에 닿는 순간의 높이는 0 m이므로

$x=25+20t-5t^2=0$에서 $-5(t+1)(t-5)=0$

그런데 $t>0$이므로 $t=5$

따라서 물체가 지면에 닿는 순간의 속도는

$v=20-10\times5=-30\,(\text{m/s})$

답 (1) 2초, 45 m (2) −30 m/s

문제 2 화성의 수평인 표면에서 10 m/s의 속도로 수직으로 위로 던져 올린 돌의 t초 후의 높이 x m가 $x=10t-2t^2$일 때, 다음을 구하시오.

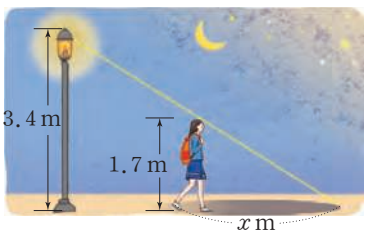
(1) 돌이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그때의 높이

(2) 돌이 화성의 표면에 닿는 순간의 속도

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같이 키가 1.7 m인 누리가 높이가 3.4 m인 가로등 바로 밑에서 출발하여 일직선으로 1.5 m/s의 속도로 걸어가고 있다.



활동 ❶ 누리가 출발한 지 t초 후의 그림자의 길이를 x m라 할 때, x를 t에 대한 식으로 나타내어 보자.

활동 ❷ 가로등 바로 밑에서 그림자 끝까지의 거리를 $f(t)$ m라 할 때, $f(t)$를 구해 보자.

활동 ❸ 누리의 그림자의 끝이 움직이는 속도를 구해 보자.

중단원 마무리하기

접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

함수의 증가와 감소, 극대와 극소

(1) **함수의 증가와 감소의 판정**

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

❶ $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

❷ $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(2) **함수의 극대와 극소의 판정**

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

❶ $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

❷ $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

방정식과 부등식에의 활용

❶ 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

❷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이려면 그 구간에서 $f(x)-g(x)\geq 0$임을 보이면 된다.

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad a=\frac{dv}{dt}=v'(t)$$

기본

01 곡선 $y=2x^2+4x-3$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 곡선 위의 점 $(0, -3)$에서의 접선의 방정식

(2) 기울기가 8인 접선의 방정식

02 함수 $f(x)=x^2-2x+7$에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

03 다음 함수에 대하여 주어진 닫힌구간에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=x^2-4x+2 \quad [-2, 3]$

(2) $f(x)=x^3-x \quad [0, 3]$

04 다음 함수의 증가와 감소를 조사하고, 극값을 구하시오.

(1) $f(x)=2x^3-6x+2$

(2) $f(x)=-x^4+4x^3+5$

05 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

(1) $x^3-3x^2+3x+2=0$ (2) $-x^4+4x+4=0$

06 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^2-2t$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도

(2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각과 그때의 위치

표준

07 곡선 $y=x^3-6x^2+3$의 접선 중에서 기울기가 최소인 접선의 방정식을 구하시오.

08 곡선 $y=-x^3+5x-4$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

09 두 곡선 $y=x^3$과 $y=ax^2+bx$가 점 $(1, 1)$에서 만나고, 이 점에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

10 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=3$에서 극솟값을 갖고 $x=-1$에서 극댓값 9를 가질 때, $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

11 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=ax^3-6ax^2+3$의 최솟값이 -29일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

12 곡선 $y=2x^3-3x^2-8x$와 직선 $y=4x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

|서·술·형|

13 두 함수 $f(x)=x^3-x^2-x+1$, $g(x)=-x^2+2x+a$에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

14 직선 도로를 달리는 어떤 자동차의 운전자가 100 m 앞의 정지 신호를 발견하고 브레이크를 밟았다. 브레이크를 밟은 후 t초 동안 달린 거리 x m가 $x=20t-ct^2$이라고 한다. 이때 정지선을 넘지 않고 멈추기 위한 양수 c의 최솟값을 구하시오.

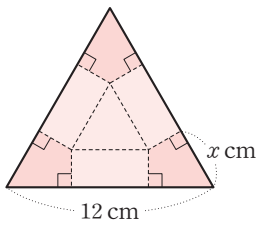
발전

|서·술·형|

15 원점에서 곡선 $y=x^4+12$에 그은 접선이 점 $(k, 32)$를 지날 때, k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 접점은 제1사분면에 있다.)

16 함수 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

17 한 변의 길이가 12 cm인 정삼각형 모양의 종이가 있다. 오른쪽 그림과 같이 세 꼭짓점 주위에서 합동인 사각형을 잘라 내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 삼각기둥 모양의 상자를 만들려고 할 때, 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x의 값을 구하시오.



18 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=16$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

Ⅱ 대단원 평가하기

하 ●●● 중 ●●● 상 ●●●

01 ●●●

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 3일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

02 ●●●

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$의 값을 구하시오.

03 ●●●

함수 $f(x)=-x^3+ax+3$의 그래프 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기가 m일 때, 상수 a와 m에 대하여 $a+m$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

04 ●●●

다음 함수가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$$

05 ●●●

함수 $f(x)=(x^3+a)(x^3+x^2+x+2)$에 대하여 $f'(0)=5$일 때, 상수 a의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

06 ●●●

$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2018}+x^{509}-2}{x-1}$의 값을 구하시오.

07 ●●●

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 20이다. $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하시오.

08

곡선 $f(x)=-x^3+2$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식

(2) 원점을 지나고 이 곡선에 접하는 직선의 방정식

09

곡선 $y=-x^2+ax+b$ 위의 점 $(3, 5)$에서의 접선의 방정식이 $y=-x+8$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

10

두 곡선 $y=x^2+ax+b$, $y=-x^3+c$가 점 $(1, -2)$에서 접할 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

11

점 $(-2, 1)$에서 곡선 $y=x^2+x$에 그은 두 접선의 접점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$

④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

12

곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ 위의 점 $(2, 6)$에서의 접선의 기울기가 3일 때,

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}$$

의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수)

13

함수 $f(x)=x^2-3x+2$에 대하여 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 값을 구하시오.

14

함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

15

함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$가 $x=1$에서 극댓값 5를 가질 때, $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

16 ●●●

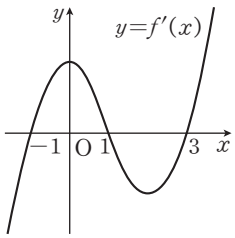
함수 $f(x)=x^3+kx^2-2kx+3$이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

17 ●●●

사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고

$f(-1)<0<f(3)<f(1)$

일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $f(2)>0$

ㄴ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 ●●●

함수 $f(x)=-2x^3+ax^2+4a^2x-3$이 $-1<x<1$에서 극솟값, $x>1$에서 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

19 ●●●

밑면의 반지름의 길이와 높이의 합이 60 cm인 원기둥의 부피가 최대일 때, 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하시오.

20 ●●●

방정식 $4x^3-12x+k=0$이 한 개의 양수인 근과 서로 다른 두 개의 음수인 근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

21 ●●●

모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-6x^3\geq k$가 성립하도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

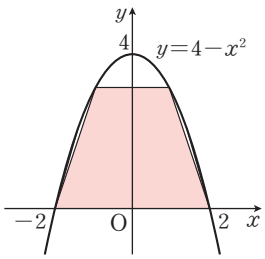
22 ●●●

수평인 지면으로부터 5 m 높이에서 30 m/s의 속도로 수직으로 위로 던져 올린 물체의 t초 후의 높이 h m가 $h=5+30t-5t^2$이다. 이 물체가 최고 높이에 도달했을 때 지면으로부터의 높이를 구하시오.

23번부터 25번까지 서술형입니다.

23 ●●●

다음 그림과 같이 곡선 $y=4-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하는 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구하시오.



24 ●●●

함수 $f(x)=x^3-12x$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(2) 방정식 $f(x)=a$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

25 ●●●

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각

$$x_P(t)=t^3-9t^2, \quad x_Q(t)=t^3-6t^2$$

일 때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위를 구하시오.

자기 평가

정답을 맞힌 문항에 ○표하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02	미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.	○ △ ×	53~ 56쪽
03 04	미분계수의 기하적 의미를 이해하고 미분가능성과 연속성의 관계를 이해할 수 있다.	○ △ ×	56~ 59쪽
05 06 07	함수의 도함수를 구할 수 있다.	○ △ ×	61~ 66쪽
08 09 10 11 12	접선의 방정식을 구할 수 있다.	○ △ ×	73~ 75쪽
13	함수에 대한 평균값 정리를 이해할 수 있다.	○ △ ×	76~ 80쪽
14 15 16 17 18	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	○ △ ×	82~ 88쪽
19 23 24-(1)	함수의 그래프의 개형을 그려 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	○ △ ×	90~ 93쪽
20 21 24-(2)	방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	95~ 97쪽
22 25	속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.	○ △ ×	99~101쪽

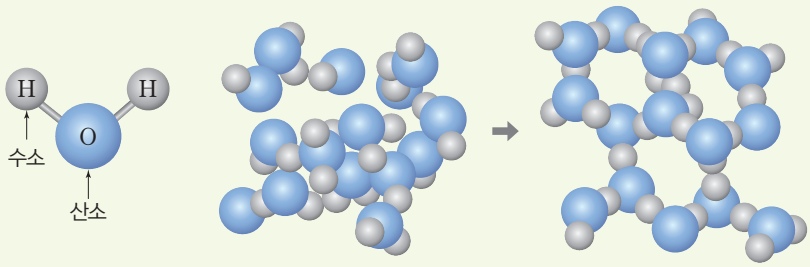
성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

온도에 따라 변하는 물의 부피

지구상의 대부분의 물질은 열을 가하면 부피가 늘어나 팽창한다. 그러나 예외가 있는데, 바로 우리가 늘 마시며, 없으면 살기 어려운 물이다.

물은 4 ℃일 때 부피가 최소이고, 이보다 온도가 내려가거나 올라가면 물 분자들이 팽창하여 빈 공간이 많이 생기는 구조가 되어서 부피가 오히려 커지게 된다. 그 이유는 물의 독특한 분자 구조 때문인데, 다음 그림과 같이 물의 온도가 내려가면 물 분자들이 수소 결합 상태로 육각형 구조를 이루기 때문이다.



물 분자 물의 입자 구조 얼음의 입자 구조

그렇다면 물의 온도에 따른 부피는 어떤 함수로 나타낼 수 있을까?

물의 온도가 0 ℃와 30 ℃ 사이에서는, 온도가 T ℃일 때의 물의 부피 V mL를

$$V(T)=-0.0000679T^3+0.0085043T^2-0.0624T+999.87$$

과 같이 나타낼 수 있다고 한다.

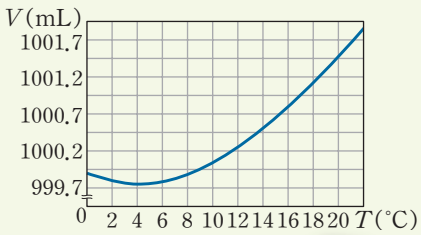
한편, 이것을 미분하면

$$V'(T)=-0.0002037T^2+0.0170086T-0.0624$$

이므로, $V'(T)=0$인 T의 값을 구하면 약 3.97이다.

또, $0\le T\le 3.97$일 때 $V'(T)\le 0$이므로 V는 감소하고, $T\ge 3.97$일 때 $V'(T)\ge 0$이므로 V는 증가한다.

이 사실로부터 함수 $V(T)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같으며, 온도가 약 4 ℃일 때, 물의 부피가 최소가 됨을 확인할 수 있다.



(출처: Stewart, J., 『미분적분학』)

빅데이터 분석과 미분

빅데이터는 데이터베이스에 잘 정리된 정형 데이터뿐만 아니라 인터넷, 소셜 네트워크 서비스, 모바일 환경에서 폭발적으로 생성되는 웹 문서, 이메일, 소셜 데이터 등의 비정형 데이터를 효과적으로 분석하는 것이 중요하다. 왜냐하면 급격히 증가하는 정보의 양 중에서 20 %는 정형 데이터, 나머지 80 %는 비정형 데이터가 될 것으로 예상되기 때문이다.

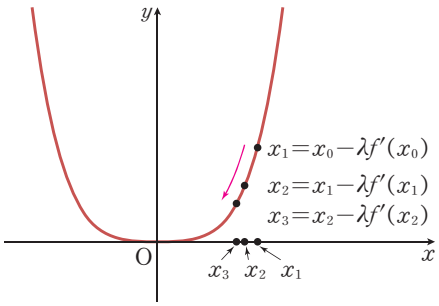
비정형 데이터에서 의미 있는 정보를 찾는 것은 빅데이터 분석에서 아주 유용하다. 한 예로 외국의 어느 택배 전문 업체는 하루에 움직이는 수만 대의 트럭에 각종 감지기를 달아 위치, 속도, 유압 등 데이터를 수집해 운전자에게 가장 짧은 운행 루트와 차량 부품 교체 시기를 알려 주게 만들었다고 한다. 이들이 하루에 약 1.6 km의 운행 거리를 줄이면 연간 525억 원의 비용이 절감되기 때문이다.

비정형 데이터에서 의미 있는 정보를 찾는 것을 수학에서의 최적화 문제로 바꾸어 생각해 볼 수 있고, 이 문제를 해결하는 가장 단순한 원리는 주어진 함수 $f(x)$의 현재 위치에서 함숫값이 감소하는 방향으로 x의 값을 이동시키는 것이다. 이를 반복적으로 수행하면 함숫값이 최소가 되는 지점을 발견할 수 있는데, 이때 이용되는 가장 기본적인 원리가 바로 미분이다.

어떤 점 x_0에서 시작하여 함수 $f(x)$가 어떤 수에 수렴할 때까지 x_k의 값의 변화를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f'(x_k)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

여기서 λ는 상수로 생각하고 현재 지점에서 도함수 $f'(x)$가 양수이면 x의 값을 감소시키고 $f'(x)$가 음수이면 x의 값을 증가시키는 과정을 반복하여 함수 $f(x)$의 극솟값을 찾는다. 이때 함수의 최적화는 이처럼 함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 찾는 것이다.



빅데이터를 구조화하여 분석하거나 다른 영역에 존재하는 데이터들을 서로 연결하여 새로운 의미를 찾는 것은 데이터를 최적화 하는 것으로 볼 수 있고, 이와 같은 일을 하는 사람들을 데이터 분석가라고 한다.

(출처: 『어패럴 뉴스』, 2014년 1월 21일 / Baydin, A. G., Pearlmutter, B. A., Radul, A. A., Siskind, J. M., 「Automatic differentiation in machine learning: a survey」)